

Lista nr 13

Zad.1 Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

a) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$; b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; c) $f(x, y) = \sqrt{x - y} \log(xy^2)$;

d) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b}$, $a > 0 \wedge b > 0$; e) $f(x, y) = \arcsin \frac{2x - 3}{x + y}$

Zad.2 Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego dla następujących funkcji:

a) $f(x, y) = 2x - xy + y^2$; b) $f(x, y) = \frac{x}{y}$; c) $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$;

d) $f(x, y) = e^{xy} \ln y$; $f(x, y, z) = (xy)^z$; f) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$

Zad. 3 Sprawdzić, że:

a) $f(x, y) = x \ln \frac{x}{y}$ spełnia $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y = f(x, y)$;

b) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$, jeżeli $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

c) $f(x, y) = e^x (\cos y + x \sin y)$ spełnia $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$;

d) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ spełnia $\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$

Zad. 4 Znaleźć pochodną kierunkową funkcji:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ w punkcie $P_0(1, 2)$ w kierunku prostej $x = 1 + \frac{1}{2}t$, $y = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t$

b) $f(x, y) = \operatorname{arctg}(xy)$ w punkcie $P_0(3, 1)$ w kierunku od tego punktu do punktu $P_1(6, 5)$

c) $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + x - y$ w punkcie $P_0(1, 2)$ w kierunku wektora $(3, 2)$

d) $f(x, y) = e^x \sin y$ w punkcie $P_0(1, \frac{\pi}{2})$ w kierunku wektora $(1, -1)$

Zad. 5 Wyznaczyć ekstrema funkcji, o ile istnieją dla:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy - 38x + 18y + 20$; b) $f(x, y) = xy - x^2 + y^2$

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y$; d) $f(x, y) = xe^y$;

e) $f(x, y) = xy + x + y - 2 \ln x - 2 \ln y$; f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$;

f) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$; h) $f(x, y) = 3x^2 + 3xy - y^2 - 15x$;

i) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x - 4y + 5$

Zad. 6 Wyznaczyć elastyczności cząstkowe funkcji:

a) $f(x, y) = cx^\alpha \cdot y^\beta$; b) $f(x, y) = 2^{x-y}$; c) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Zad. 8. Wyznaczyć różniczki zupełne funkcji:

a) $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; c) $f(x, y) = \arcsin(xy)$;

d) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$; e) $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$